

Flasche in bewegt sich auf Ellipse in xy-Ebene

P30-1

P30

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

durchläuft Ellipse dreimal in 2 Sekunden.

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad \omega = \text{const}$$

$$\Rightarrow y(t) = b^2 \left[1 - \frac{x(t)^2}{a^2} \right] = b^2 \left[1 - \frac{a^2 \cos^2 \omega t}{a^2} \right]$$

$$= b^2 [1 - \cos^2 \omega t] = b^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Rightarrow y(t) = b \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t, a)$$

Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{2 \text{ sec}} = \frac{\pi}{\text{sec}}$$

→ Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-a\omega \sin \omega t, b\omega \cos \omega t, 0)$$

→ Beschleunigung

$$\vec{b}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = (-a\omega^2 \cos \omega t, -b\omega^2 \sin \omega t, 0) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

(b) \rightarrow auf das Teilchen wirkt die Kraft

$$\underline{\underline{\vec{F} = m\vec{b} = -m\omega^2 \vec{r}(t)}}$$

anziehende Zentralkraft.

- \rightarrow konservativ, Energieerhaltung!
- \rightarrow Drehimpulserhaltung!

(c) Da die Kraft eine Zentralkraft ist, ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten; explizite Berechnung:

$$\begin{aligned} \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} &= m \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ b\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\omega (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{L} = mab\omega \cdot \vec{e}_z}$$

hängt nicht von der Zeit ab ✓

(e) Fläche, die der Ortsvektor in einer Sekunde überstreicht:

$$\underline{\underline{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{L}}{m} \right| = \frac{1}{2m} m\omega ab = \frac{1}{2} ab\omega}}$$

$$\Rightarrow \int_{S(t=0)}^{S(t)} dS' = \int_0^t dt' \cdot \frac{1}{2} ab\omega$$

$$\rightarrow \underline{\underline{S(t) - \underbrace{S(0)}_{=0} = \frac{1}{2} ab\omega t = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{3\pi}{\omega} \cdot t}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{S(1 \text{ sec}) = \frac{1}{2} ab 3\pi}}$$

P31

P3-1

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} \quad V'(x) = -\frac{2V_0}{a} \frac{\sinh(x/a)}{\cosh^3(x/a)} \quad V''(x) = -\frac{2V_0}{a^2} \frac{(1 - 2\sinh^2(x/a))}{\cosh^4(x/a)}$$

(b)

Das Potential hat *keine* Nullstelle; $V(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$;
das Extremum liegt bei $x = 0$ mit $V(0) = V_0$, $V''(0) = -2V_0/a^2$

(b)
fortsetzen

$$V_0 > 0$$

labiles Gleichgewicht bei $x = 0$
Bewegung nur für $E > 0$ möglich
nur ungebundene Bewegung

$0 < E < V_0$ 2 getrennte einseitig ungebundene Bewegungen
 $E = V_0$ Separatrix;
3 Lösungstypen: instabiles Gleichgewicht, ein- und auslaufende Bewegung
 $E > V_0$ beidseitig ungebundene Bewegung

$$V_0 < 0$$

stabiles Gleichgewicht bei $x = 0$
Bewegung nur für $E > V_0$ möglich

$V_0 < E < 0$ gebundene Bewegung
 $E \geq 0$ beidseitig ungebundene Bewegung

(a)

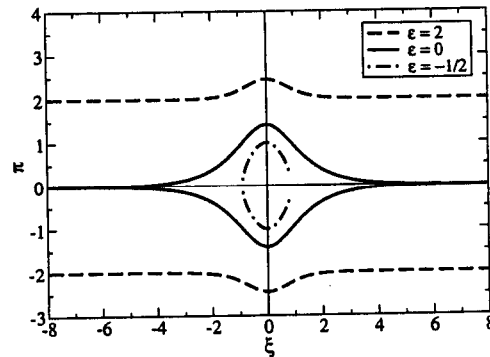
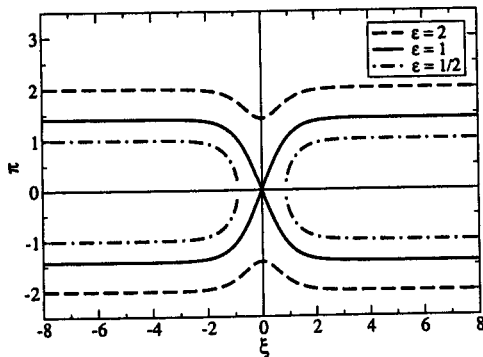
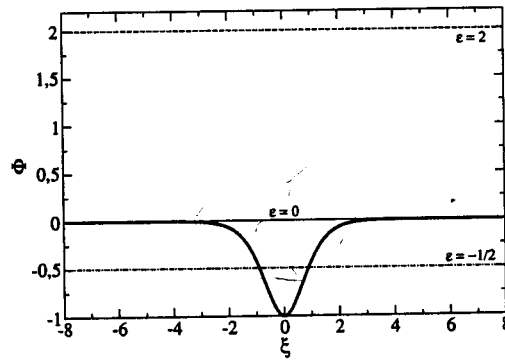
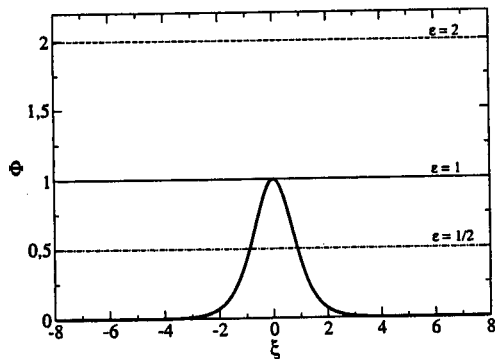


Abbildung 2: Dimensionslose Darstellung: $\xi = x/a$; $\Phi = V/|V_0|$; $\epsilon = E/|V_0|$. Die oberen Diagramme zeigen den Verlauf des Potentials $\Phi(\xi)$ für positives Vorzeichen von V_0 (links) und negatives Vorzeichen von V_0 (rechts). Links unten: Phasenporträt im Potential $\Phi(\xi) = +\frac{1}{\cosh^2 \xi}$ für verschiedene Werte von ϵ . Rechts unten: Phasenporträt im Potential $\Phi(\xi) = -\frac{1}{\cosh^2 \xi}$.

(c)

Stabiles Gleichgewicht bei $x = 0$ nur für $V_0 < 0$, also: $V(x) = -\frac{|V_0|}{\cosh^2(x/a)}$

TAYLOREntwicklung von $V(x)$ um $x = 0$ bis zum quadratischen Term (linearer Term verschwindet am Gleichgewichtspunkt!):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(0)}{m}} = \sqrt{\frac{2|V_0|}{ma^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi a \sqrt{\frac{2m}{|V_0|}}$$

Die Bewegung stellt in diesem Falle also eine *harmonische Schwingungen* um $x = 0$ dar; die Näherung ist nur gerechtfertigt für *kleine Auslenkungen* aus der Gleichgewichtslage, d.h. für $|x| \ll a$ (a ist die einzige Vergleichslänge in unserem Problem!).

Nebenrechnung:

$$V(x) = \frac{-|V_0|}{\cosh^2(x/a)} ; V'(x) = \frac{2|V_0| \sinh(x/a)}{a \cosh^3(x/a)} ; V''(x) = \frac{2|V_0|}{a^2} \frac{(1 - 2 \sinh^2(x/a))}{\cosh^4(x/a)}$$

$$\Rightarrow V(x=0) = -|V_0| ; V'(x=0) \stackrel{!!}{=} 0 ; V''(x=0) = \frac{2|V_0|}{a^2}$$

(muß sein, da $x=0$ stabile Gleichgewichtslage!)

\Rightarrow Taylor-Entwicklung von $V(x)$ um x_0 bis 2-ter Ordng:

$$V(x) \approx V(x_0) + \underbrace{V'(x)}_{=0} \big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} V''(x) \big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

$\Rightarrow (x_0 : \text{stab. Gleichgewichtslage, also } x_0 = 0)$

$$\Rightarrow V(x) \approx -|V_0| + \frac{1}{2} \frac{2|V_0|}{a^2} x^2 \Rightarrow \boxed{V(x) \approx -|V_0| + \frac{|V_0|}{a^2} x^2}$$

$$\rightarrow \text{Kraft: } F = -\frac{d}{dx}V(x) = -\frac{2|V_0|}{a^2}x$$

\rightarrow Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = F \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{2|V_0|}{a^2}x$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{x} + \left(\frac{2|V_0|}{ma^2}\right)x = 0}$$

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators
mit der Frequenz

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2|V_0|}{ma^2}}}$$



P32

Betrachte Intertialsystem Σ des Tunnels und Intertialsystem Σ' der Rakete, siehe Abbildung. In Σ ruht T mit $l_T = 50$ m; aus Σ' hingegen erscheint T verkürzt mit $l'_T < l_T$. Andererseits ruht R in Σ' mit $l'_R = 80$ m, erscheint aber in Σ mit $l_R = 40$ m verkürzt – passt also (z. B. für $t = 0$) in T .

Der scheinbare Widerspruch liegt darin, dass vorderes und hinteres Ende von R nicht gleichzeitig in Σ' in T sind.

